

References

uijn, Van Tenbergen and D. Kruijswijk, On the set of divisors of a number, *Nieuw Wisk. (2)* 23 (1949-57) 191-193.
 ös and J. Schönheim, On the set of nonpairwise coprime divisors of a number, in: P. et al., eds., *Combinatorial theory and its applications* (North-Holland, 1970) 369-376.
 ös, M. Herzog and J. Schönheim, An extremal problem on the set of noncoprime divisors of a number, *Israel J. Math.* 8 (1970) 408-412.
 tona, A generalization of Sperner's theorem, *J. Combinatorial Theory*, to appear.
 ica, Orthogonal families of sets, *Canad. Math. Bull.*, to appear.
 ica and J. Schönheim, Differences of sets and a problem of Graham, *Canad. Math. Bull.* 12 (1969) 635-638.
 öhlein, A generalization of results of P. Erdős, G. Katona and D. Kleitman concerning Sperner's theorem, *J. Combinatorial Theory* 11 (1971) 111-117.

Per telephone
 received 9/11/68
 to
 demichij@math.binghamton.edu

SUR LES PARTITIONS NON CROISEES D'UN CYCLE

G. KREWERAS

Institut de Statistique des Universités de Paris, 9 Quai Saint-Bernard, 75-Paris-Sème, France

Reçu le 13 avril 1971

Résumé. L'article définit les partitions d'un ensemble fini structuré en un cycle qui possèdent la propriété qu'une paire de points appartenant à une classe et une paire de points appartenant à une autre classe ne puissent jamais être en disposition croisée. On établit que ces partitions forment un treillis et l'on précise quelques-unes des propriétés descriptives et énumératives de ce treillis; on en calcule en particulier la fonction de Möbius.

§1. Définitions

Dans tout ce qui suit, nous appellerons *cycle* le couple (M, c) formé par

- (1) un ensemble fini non-vide M de cardinal m ,
- (2) une bijection circulaire c de M dans lui-même, le mot "circulaire" signifiant que pour tout $x \in M$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ on a $c^i(x) \neq x$. Les éléments de M seront appelés *points*.

Soit A une partie non-vide quelconque de M , et soit $x \in A$. Si k_x est le plus petit nombre positif tel que $c^{k_x}(x) \in A$, nous poserons $c^{k_x}(x) = d(x)$. Il est clair que $d(x)$ définit une bijection circulaire de A dans lui-même; (A, d) est donc un cycle, dont nous parlerons comme de la *trace* de (M, c) sur A .

Pour tout couple (x, y) de points distincts de M , nous appellerons $\delta(x, y)$ (*distance* de x à y) le plus petit entier positif k tel que $c^k(x) = y$; on a ainsi, pour toute-paire $\{x, y\}$,

$$\delta(x, y) + \delta(y, x) = m.$$

Etant donné deux paires disjointes $\{x, y\}$ et $\{u, v\}$, nous dirons que

ces paires sont *croisées* si l'entier $\delta(x, y)$ est compris entre le plus petit et le plus grand des deux entiers $\delta(x, u)$ et $\delta(x, v)$, qu'elles sont *non-croisées* dans le cas contraire.

Deux parties disjointes quelconques A et B de M seront dites *non-croisées* s'il n'existe pas deux paires croisées qui soient incluses respectivement dans A et B ; en particulier si l'une au moins des deux parties disjointes A et B est un singleton (partie de cardinal 1), A et B sont nécessairement non-croisées.

Dans certains cas nous considérerons deux parties non-croisées A et B de M qui posséderont la propriété suivante: il existe deux points x et y tels que

$$x \in A, y \in B, c(x) \in B, c(y) \in A.$$

S'il en est ainsi, nous dirons que les deux parties A et B sont *adjacentes*. Remarquons que l'une des deux parties adjacentes peut être un singleton $\{x\}$; l'autre contient alors $c(x)$ et $c^{-1}(x)$.

Etant donné un cycle (M, c) , nous appellerons *partition non-croisée* de M une partition dont deux classes distinctes quelconques sont non-croisées.

L'objet central de cet article est l'étude des propriétés de l'ensemble des partitions non-croisées.

§2. Structure de treillis

Etant donné un cycle (M, c) et une partition quelconque P de M , nous définirons comme suit une nouvelle partition \bar{P} , que nous appellerons la *fermeture non-croisée* de P : les classes de \bar{P} seront prises comme sommets d'un graphe non-orienté $G(\bar{P})$, deux sommets de $G(\bar{P})$ étant non-adjacents si et seulement si les deux classes correspondantes de P sont non-croisées. Ce sont alors les sommets de chacune des composantes connexes de $G(\bar{P})$ qui définissent les classes de \bar{P} à réunir pour former chacune des classes de \bar{P} . (En d'autres termes, si deux classes se croisent on les réunit en une seule, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus

que des classes non-croisées.) Toute partition P de M est évidemment plus fine (au sens large*) que sa fermeture non-croisée.

Théorème 1. *Etant donné une partition quelconque P de M , toute partition non-croisée moins fine que P est également moins fine que la fermeture non-croisée de P .*

Démonstration. Si Q est une partition moins fine que P , toute classe A de P est incluse dans une classe B de Q ; soient alors B_1 et B_2 deux classes distinctes de Q et soient A_1 et A_2 deux classes de P telles que

$$A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2.$$

Si la partition Q est non-croisée, B_1 et B_2 sont non-croisées, donc aussi A_1 et A_2 . Il en résulte que chaque fois que deux classes de P se croisent, elles sont incluses dans une même classe de Q . De proche en proche, on voit que chacune des composantes connexes de $G(\bar{P})$ a pour sommets des classes de P incluses dans une même classe de Q . Ainsi toute classe de la fermeture non-croisée de P est incluse dans une classe de Q , ce qui établit le théorème 1.

Il est bien connu que l'ensemble $\{P, Q, \dots\}$ de toutes les partitions d'un ensemble donné forme un treillis, dont nous noterons les deux opérations $P \wedge Q$ (la moins fine des partitions plus fines que P et Q) et $P \vee Q$ (la plus fine des partitions moins fines que P et Q)

Théorème 2. *Si P et Q sont deux partitions non-croisées, il en est de même de $P \wedge Q$.*

Démonstration. Toute classe de $P \wedge Q$ est intersection d'une classe de P et d'une classe de Q . Or deux classes quelconques de P sont par hypothèse non-croisées; il en est donc de même de leurs intersections respectives avec une classe quelconque de Q , et, à plus forte raison, avec deux classes distinctes de Q .

* Nous utiliserons toujours dans ce qui suit, les expressions "moins fine" et "plus fine" dans leur sens large, sauf à mentionner explicitement le contraire.

Théorème 3. *Si P et Q sont deux partitions non-croisées, toute partition non-croisée moins fine que P et que Q est moins fine que la fermeture non-croisée de $P \vee Q$.*

Démonstration. Toute partition moins fine que P et Q est moins fine que $P \vee Q$ (par définition de $P \vee Q$). Si une telle partition est également non-croisée, elle est moins fine que la fermeture non-croisée de $P \vee Q$ en vertu du théorème 1.

Il résulte des théorèmes 2 et 3 que les partitions non-croisées de M forment un ensemble T_m qui a lui aussi la structure d'un treillis. Il est

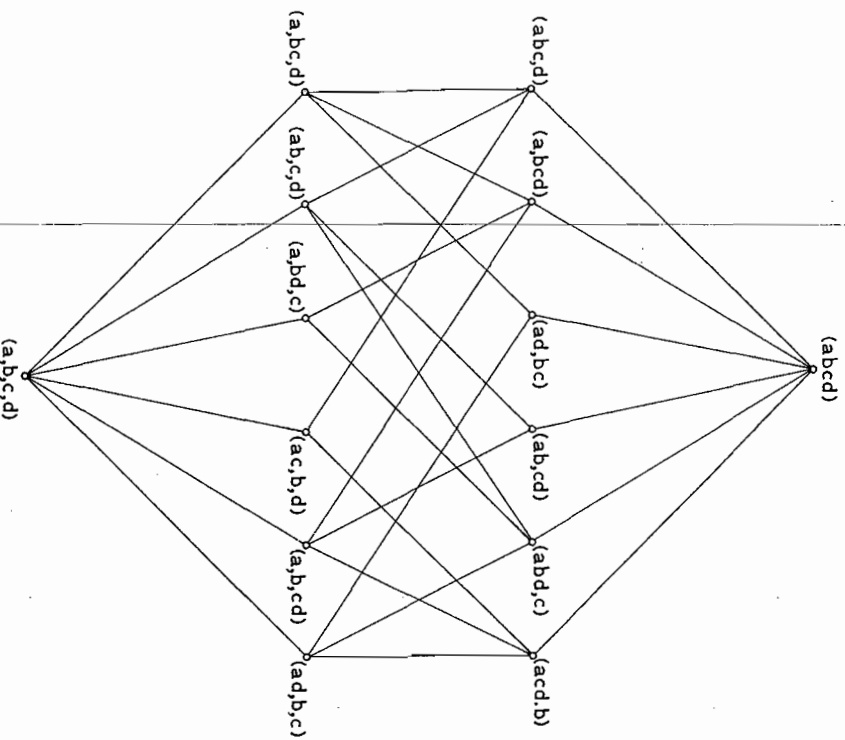


Fig. 1.

cependant à remarquer que T_m n'est pas en général un sous-treillis du treillis de toutes les partitions de M . La fig. 1 représente le treillis T_4 pour M formé des quatre points a, b, c, d pris dans l'ordre cyclique.

§3. Partitions serrées, partitions complémentaires

En vue de l'étude de certaines propriétés de T_m il est intéressant de considérer une espèce particulière de partitions non-croisées. Soit un cycle (L, e) où L est un ensemble de cardinal $2m$ et e une bijection circulaire de L dans L ; nous considérerons L comme partitionné en deux classes de cardinal m , l'une formée des points $x, e^2(x), e^4(x), \dots$ (points pairs), l'autre des points $e(x), e^3(x), \dots$ (points impairs).

Cela dit, nous appellerons *partition serrée* de L toute partition r satisfaisant aux conditions suivantes:

- (a) R est une partition non-croisée,
- (b) chaque classe de R est formée de points d'une même parité,
- (c) quel que soit x , les deux classes qui contiennent respectivement x et $e(x)$ sont adjacentes (au sens défini au §1).

Toute classe A d'une partition serrée R a une ou plusieurs classes adjacentes; en fait, il est aisé de se rendre compte qu'il y en a autant que de points dans A . On voit également sans peine que si l'on chemine à partir de A , de classe en classe par adjacences successives, on peut atteindre n'importe quelle classe de R et on ne peut jamais (à moins de rebrousser chemin) revenir en A . Il en résulte que les classes de R , avec leurs adjacences, définissent un *arbre*. Or le nombre d'arêtes de cet arbre, c'est-à-dire le nombre de paires de classes adjacentes, est égal à m ; en effet, chacune des $2m$ paires $\{x, e(x)\}$ intervient dans une adjacence et chaque adjacence fait (par définition) intervenir deux telles paires.

L'arbres des classes, ayant m arêtes, a donc $m + 1$ sommets. *Toute partition serrée de L est ainsi une partition en $m + 1$ classes*; la fig. 2 donne un exemple correspondant à $m = 8$.

De cette remarque relative aux partitions serrées de L résulte une propriété de l'ensemble des partitions non-croisées de M . En effet soit P une partition non-croisée de M en h classes non-vides. Le cycle (M, c) peut toujours être considéré comme la trace sur M d'un cycle (L, e) , avec $e^2 = c$, ce qui revient à intercaler entre les m points de M , consi-

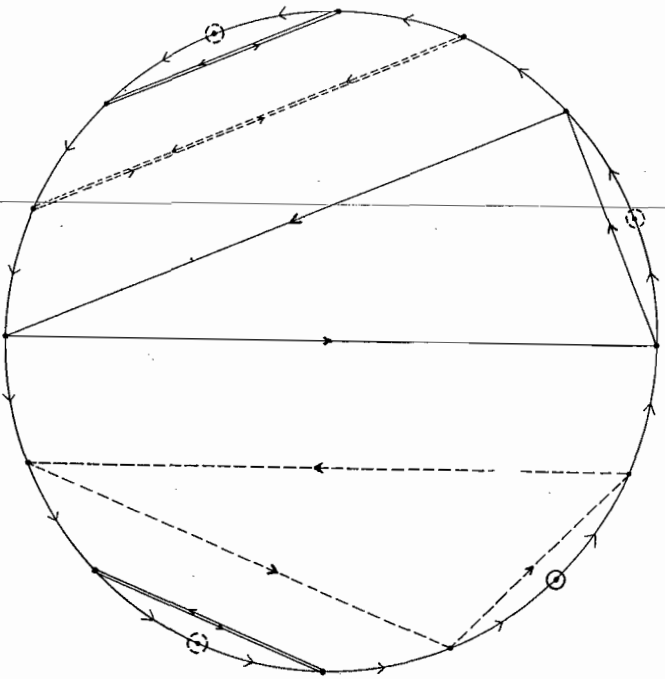


Fig. 2.

dérés comme pairs, autant de points impairs formant un autre cycle (M', c') isomorphe à (M, c) .

Or à partir de la partition P de M on peut toujours compléter, par adjacence, une partition serrée R de L , dont la restriction à M' sera une partition non-croisée P' de M' . Cette dernière aura $m + 1 - h$ classes puisqu'il y a au total $m + 1$ classes dans R . On voit ainsi qu'il y aura autant de partitions non-croisées de M en h classes que de partitions non-croisées de M (ou de M') en $m - h + 1$ classes; nous calculerons plus loin le nombre exact de ces partitions.

Indiquons pour l'instant une traduction de cette propriété en langage algébrique. Etant donné le cycle (M, c) et une partition non-croisée P de M , on peut à cette partition faire correspondre une bijection p de M dans M définie comme suit: tout point x de M aura pour image $p(x)$ le premier $c^i(x)$ ($i > 0$) qui appartiendra à la même classe que x . Dans ces conditions, on s'assure sans difficulté que la partition appelée plus haut

P' est isomorphe à une partition non-croisée de M (et non plus de M' , dont les x sont isomorphes aux $e(x)$ correspondants), et que cette partition P' peut être définie par

$$p' = cp^{-1},$$

comme la partition P avait été définie par p . En répétant l'opération, on trouve

$$p'' = cp'^{-1} = c(pc^{-1}) = cpc^{-1}.$$

On retombe alors non plus sur la partition P dont on était parti, mais sur la partition qui s'en déduit si l'on en transforme tous les points par c .

Enfin une autre conséquence de la remarque relative aux partitions serrées est la suivante: si l'on appelle *complémentaires* la partition P de M et la partition P' de M' , tout singleton $\{x\}$ de l'une des deux partitions, par exemple P , est adjacent à une classe de P' qui comprend les deux points $e(x)$ et $e^{-1}(x)$. Or ces derniers sont consécutifs dans M' puisque $e = e^2 \cdot e^{-1} = c \cdot e^{-1}$. Inversement, toute classe de P' qui comprend deux points consécutifs y et $c(y)$ est adjacente au singleton $\{e(y)\}$. On en conclut notamment que si la partition P n'a pas de singleton, aucune classe de P' ne comprend deux points consécutifs (nous dirons que P' est une partition "diluée"). Il s'ensuit que, s'agissant de partitions non-croisées, le nombre de partitions "diluées" de M en α classes est égal à celui des partitions "sans singleton" de M' (ou de M) en $m - \alpha + 1$ classes. Nous préciserons plus loin ce nombre en fonction de m et de α .

§ 4. Partitions de type donné

Nous dirons qu'une partition quelconque P est d'un *type* donné si l'on spécifie, pour tout entier positif k , le nombre s_k de classes de P qui ont pour cardinal k . Nous désignerons le type par la suite des entiers

$$Y = ((s_1, s_2, \dots, s_k, \dots)).$$

Si P a h classes non-vides en tout, on devra évidemment avoir

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k + \dots = h,$$

$$s_1 + 2s_2 + \dots + ks_k + \dots = m.$$

Une autre manière de spécifier le type Y est d'écrire la suite de Young

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_h),$$

qui énumère les cardinaux des h classes dans un ordre non-croissant.

Nous noterons $[[m, h]]$ l'ensemble des types de partitions de M en h classes (non-vides).

Théorème 4. Si $Y \in [[m, h]]$, le nombre de partitions non-croisées de M qui sont de type Y est égal à

$$p(Y) = \frac{(m)_{h-1}}{s_1! s_2! \dots s_k! \dots}$$

Démonstration. L'énoncé équivaut à affirmer que si l'on compte non pas simplement les partitions non-croisées elles-mêmes, mais les partitions non-croisées accompagnées d'un étiquetage des parties de même cardinal, leur nombre doit être égal à $(m)_{h-1}$. Il revient au même de compter les différentes manières de spécifier sur M une suite de h parties A_1, A_2, \dots, A_h , de cardinaux successifs imposés a_1, a_2, \dots, a_h , telles que $\{A_1, \dots, A_h\}$ soit une partition non-croisée de M . C'est ce que nous ferons dans ce qui suit. Le principe de la démonstration sera une récurrence sur m .

Etant donné une partie non-pleine quelconque A de M , nous appelons *lacune* de A toute succession maximale de points de $M - A$, c'est-à-dire toute suite $x, c(x), \dots, c^{k-1}(x)$ d'éléments n appartenant pas à A telle que $c^{-1}(x) \in A$ et $c^k(x) \in A$. Nous appellerons x et $c^{k-1}(x)$ le *point initial* et le *point final* de la lacune; il peuvent éventuellement coïncider.

Si A est une des classes d'une partition non-croisée P , toute autre classe A' de la même partition P est incluse tout entière dans une lacune de A ; car si deux éléments u et v de A' appartaient à deux lacunes distinctes, la paire $\{u, v\}$ serait nécessairement croisée avec A .

Toute lacune C d'une classe A de P est ainsi une réunion de classes de P . Ces classes forment d'ailleurs une partition non-croisée de C , si l'on convient de définir sur C un cycle qui soit la trace de (M, c) . Notamment si l'on considère la partie A_h d'une partition non-croisée

$P = \{A_1, A_2, \dots, A_{h-1}, A_h\}$, et que cette partie ait l lacunes, chacune de ces lacunes aura pour cardinal une somme d'entiers positifs pris parmi les termes de la suite a_1, a_2, \dots, a_{h-1} .

Calculons d'abord combien il existe dans M de parties A ayant l lacunes, étiquetées C_1, C_2, \dots, C_l et de cardinaux respectifs imposés c_1, c_2, \dots, c_l ; A est alors de cardinal $a = m - (c_1 + \dots + c_l)$. Une fois placée C_1 , ce qui est possible de m manières (par exemple les m positions du point initial de C_1) il y a $(l-1)!$ manières de spécifier l'ordre de rencontre après C_1 des $l-1$ autres lacunes. Il reste alors à spécifier combien de points de A seront placés entre chaque lacune et la suivante, c'est-à-dire à définir une suite de l entiers positifs de somme a ; on sait que cela est possible de $\binom{a-1}{l-1}$ manières. Finalement, le nombre de manières de définir A est égal au produit

$$m(l-1)! \binom{a-1}{l-1} = m(a-1)_{l-1}.$$

Notons que ce nombre ne dépend, pour M donné, que du cardinal a de A et du nombre l de lacunes, sans faire intervenir les cardinaux particuliers de celles-ci.

Pour compter les façons de placer sur M des parties A_1, A_2, \dots, A_h , de cardinaux imposés a_1, a_2, \dots, a_h , qui constituent une partition non-croisée P , fixons-nous d'abord arbitrairement le nombre l de lacunes de A_h . Pour chacune des $m(a_h - 1)_{l-1}$ possibilités relatives à A_h , l'ensemble $\{1, 2, \dots, h-1\}$ des indices des autres classes A_i va se partitionner en l classes D_j ($j \in \{1, 2, \dots, l\}$), dont chacune correspondra à tous les A_i inclus dans une même lacune C_j de A_h ; désignons cette partition de $\{1, 2, \dots, h-1\}$ par $R = \{D_1, D_2, \dots, D_l\}$. Le cardinal c_j de la lacune C_j est égal à

$$c_j = \sum_{i \in D_j} a_i = a_{D_j}.$$

Les classes A_i telles que $i \in D_j$ constituent, on l'a fait remarquer, une

une partition non-croisée de C_j en d_j classes ($d_j = \text{card } D_j$). Comme a_{D_j} , en tant que cardinal d'une lacune, est certainement $\leq m-1$, on peut se servir de l'hypothèse de récurrence pour affirmer que le nombre de manières de placer dans C_j les A_i pour lesquels $i \in D_j$ est égal à $(a_{D_j})_{d_j-1}$. Le nombre total de manières de placer A_1, A_2, \dots, A_{h-1} , pour une partition R donnée, est ainsi

$$X_R = \prod_{j=1}^l (a_{D_j})_{d_j-1}.$$

Si, en laissant l fixe, on fait décrire à R l'ensemble de toutes les partitions de $\{1, 2, \dots, h-1\}$ en l classes, on peut calculer la somme des X_R en se servant d'une identité formelle, pour la démonstration de laquelle nous renvoyons à [2]. En vertu de cette identité, cette somme est égale à

$$\binom{h-2}{l-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{h-1})_{h-l-1} = \binom{h-2}{l-1} (m - a_h)_{h-l-1}.$$

Placer sur M une classe A_h de cardinal a_h à l lacunes et répartir les $h-1$ autres classes dans ces l lacunes de façon qu'elles en forment des partitions non-croisées, cela est finalement possible d'un nombre de manières égal à

$$m(a_h - 1)_{l-1} \binom{h-2}{l-1} (m - a_h)_{h-l-1} = m \binom{h-2}{l-1} (a_h - 1)_{l-1} (m - a_h)_{h-2-(l-1)}.$$

Cette expression, si enfin on la somme par rapport à l (formule du binôme de Vandermonde), donne

$$m(m-1)_{h-2} = (m)_{h-1};$$

c'est bien là l'expression annoncée, ce qui termine la démonstration du théorème 4.

Corollaire 4.1. *Le nombre total de partitions non-croisées d'un cycle de m points en h classes est égal à*

$$\frac{(m-1)! m!}{(h-1)! h! (m-h)! (m-h+1)!} = \gamma(m-1, h-1).$$

Démonstration. Cela résulte du théorème 4 et du fait bien connu que

$$\sum_{r \in \llbracket m, h \rrbracket} \frac{h!}{s_1! s_2! \dots} = \binom{m-1}{h-1}.$$

Cette formule exprime, rappelons-le, que parmi les $\binom{m-1}{h-1}$ suites de h entiers positifs de somme m , le nombre de celles qui pour tout k ont s_k termes égaux à k est égal au multinomial $\binom{h}{s_1 s_2 \dots}$.

L'expression même de $\gamma(m-1, h-1)$ confirme le résultat obtenu au §3, à savoir qu'il y a autant de partitions non-croisées de M en h classes qu'en $m-h+1$ classes.

Corollaire 4.2. *Le nombre total de partitions non-croisées d'un cycle de m points est égal au nombre (dit "de Catalan")*

$$\gamma_m = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}.$$

Démonstration. On obtient ce nombre par sommation, pour $h \in \{1, 2, \dots, m\}$, de l'expression $\gamma(m-1, h-1)$; le fait que cette sommation donne le nombre de Catalan est facile à établir et, du reste, bien connu; cf. [3] par exemple.

§5. Partitions diluées et partitions sans singleton

Pour toute partition non-croisée P (autre que la partition triviale) de M en h classes, appelons *arc* toute succession maximale de points d'une même classe de P , et considérons l'ensemble N , de cardinal n , des points initiaux de tous les arcs. Il est clair que la trace de P sur N est une partition *diluée* de N en h classes (le cycle sur N étant la trace du cycle sur M). Appelons alors $\omega(n, h)$ le nombre de partitions diluées d'un cycle de n éléments en h classes.

Puisqu'il y a $\binom{m}{n}$ manières de spécifier sur M les n points qui formeront N , le nombre total de partitions non-croisées de M en h classes pourra s'écrire

$$\theta(m-1, h-1) = \sum_{n \geq h} \binom{m}{n} \omega(n, h),$$

ce qui donne immédiatement

$$\frac{(m)_h (m-1)_{h-2}}{(h-1)! h!} = \sum_{k \geq 0} \frac{\omega(h+k, h)}{(h+k)!} (m)_{h+k};$$

puis, après simplification par $(m)_h$,

$$(m-1)_{h-2} = (h-1)! h! \sum_{k \geq 0} \frac{\omega(h+k, h)}{(h+k)!} (m-h)_k.$$

Mais une telle expression de $(m-1)_{h-2}$ comme combinaison linéaire de termes $(m-h)_k$ est nécessairement identique à celle donnée par la formule de Vandermonde:

$$(m-1)_{h-2} = \sum_{k \geq 0} \binom{h-2}{k} (h-1)_{h-k-2} (m-h)_k.$$

On en conclut immédiatement que

$$\omega(h+k, h) = \frac{(h+k)!}{h(h-1)k!(k+1)!(h-k-2)!};$$

d'où il est facile de repasser en $\omega(n, h)$, dont le tableau 1 donne les premières valeurs. Le nombre $\omega(n, \alpha)$ répond à la question laissée en sus-pens au §3 sur le nombre de partitions diluées de M en α classes; le même nombre, qui peut être lu $\omega(m, m-\beta+1)$, compte le nombre de partitions sans singleton de M en $\beta = m - \alpha + 1$ classes.

Il est à remarquer que les nombres du tableau 1 sont ceux qui interviennent comme coefficients (ou plus exactement sommes des coeffi-

Tableau 1

$\omega(n, h)$	$n=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$h=2$	1	1	2	5	5	21	14	42	300	330	132
3			1	1	5	9	14	42			
4				1	1	14	21	84			
5					1	1	14	56			
6							1	20			
7											

cients des termes de même "poids" dans les expressions donnant les b en fonction des a lorsque

$$y = x(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n - \dots),$$

$$x = y(1 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_n x^n + \dots);$$

voir à ce sujet [1], [5] et [6].

En outre, les sommes des $\omega(n, h)$ par rapport à n , pour les h successifs, sont les nombres qui résolvent le problème dit parfois des "parenthésages de Schröder" (cf. [8]). On peut retrouver l'expression de ces nombres grâce à la remarque suivante: toute partition sans singleton de M en β classes est d'un type Y' défini par une suite de Young de β termes tous ≥ 2 . En diminuant d'une unité tous les termes de Y' , on obtient une suite de Young Y appartenant à $[[m-\beta, \beta]]$. Le nombre cherché est donc (théorème 4)

$$\sum p(Y') = \sum \frac{(m)_{\beta-1}}{s_1! s_2! \dots s_k! \dots},$$

la sommation dans les deux membres, étant étendue à tous les Y' tels que $Y \in [[m-\beta, \beta]]$. Si l'on tient compte de ce que $Y = ((s_1 s_2 s_3 \dots))$ équivaut à $Y' = ((0 s_1 s_2 \dots))$, on est conduit à

$$\frac{(m)_{\beta-1}}{\beta!} \sum \binom{\beta}{s_1 s_2 \dots s_k \dots},$$

ou $\sum \binom{\beta}{s_1 s_2 \dots s_k \dots}$ est le nombre total de β -compositions de l'entier $m-\beta$, soit $\binom{m-\beta-1}{\beta-1}$, ce qui fait retomber sur l'expression trouvée.

§6. Suites monotones et cheminements dans T_m

Théorème 5. *Le nombre de manières dont on peut définir dans T_m une suite de $r-1$ partitions dont chacune soit plus fine (au sens large) que celle qui la précède est*

$$w(m, r) = \frac{(mr)_{m-1}}{m!}$$

Démonstration. $w(m, 1)$ est égal à 1 par convention naturelle et $w(m, 2)$ se réduit évidemment au cardinal de T_m , qui, on l'a vu, est le nombre de Catalan

$$\frac{(2m)!}{m!(m+1)!} = \frac{(2m)_{m-1}}{m!}$$

L'expression annoncée de $w(m, r)$ est donc vraie pour $r = 1$ et pour $r = 2$; nous allons montrer que si elle est établie jusqu'à la valeur r du deuxième argument, alors elle est vraie aussi pour la valeur $r + 1$. Remarquons pour cela que si on l'appelle P_1, P_2, \dots, P_r une suite de r partitions telles que P_i soit plus fine que P_{i-1} ($i \in \{2, 3, \dots, r\}$), et si P_i est une partition donnée P de type $((s_1, s_2, \dots, s_k, \dots)) \in \llbracket m, h \rrbracket$, le nombre de manières de spécifier le reste de la suite est le produit Π des nombres $w(k_A, r)$ pour les différentes classes A de P_i .

Supposons que la partition initiale donnée P soit de type $Y = ((s_1 s_2 \dots s_k \dots)) \in \llbracket m, h \rrbracket$. Le produit des $w(k_A, r)$ est alors égal à

$$\Pi_\gamma = [w(1, r)^{s_1}] [w(2, r)]^{s_2} \dots [w(k, r)]^{s_k} \dots$$

Par suite de l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\Pi_\gamma = \frac{[(r)_0]^{s_1} [(2r)_1]^{s_2} \dots [(kr)_{k-1}]^{s_k} \dots}{(1!)^{s_1} (2!)^{s_2} \dots (k!)^{s_k} \dots}$$

Si au lieu de spécifier P on en spécifie seulement le type Y , le produit

Π_γ est à prendre autant de fois qu'il existe de partitions non-croisées de ce type Y , c'est-à-dire, en vertu du théorème 4,

$$\frac{(m)_{h-1}}{s_1! s_2! \dots s_k! \dots}$$

fois. Le nombre de possibilités est ainsi égal à

$$\begin{aligned} & \frac{(m)_{h-1} [(r)_0]^{s_1} [(2r)_1]^{s_2} \dots [(kr)_{k-1}]^{s_k} \dots}{(1!)^{s_1} s_1! (2!)^{s_2} s_2! \dots (k!)^{s_k} s_k! \dots} = \\ & = \frac{\varphi(Y)}{(m-h+1)!} [(r)_0]^{s_1} [(2r)_1]^{s_2} \dots [(kr)_{k-1}]^{s_k} \dots; \end{aligned}$$

$\varphi(Y)$ est l'expression bien connue du nombre total de partitions de type Y d'un ensemble fini donné.

Si enfin, au lieu de donner le type Y dans $\llbracket m, h \rrbracket$, on fait décrire à Y cet ensemble $\llbracket m, h \rrbracket$, il faudra calculer, comme numérateur d'une fraction de dénominateur $(m-h+1)!$, la somme

$$\sum_{Y \in \llbracket m, h \rrbracket} \varphi(Y) \frac{[(r)_0]^{s_1} [(2r)_1]^{s_2} \dots [(kr)_{k-1}]^{s_k} \dots}{(m-h+1)!}$$

Mais puisque $\varphi(Y)$ est le nombre total de partitions de type Y d'un ensemble de cardinal m , la somme ci-dessus apparaît comme un cas particulier du premier membre de l'identité déjà utilisé au § 4, à savoir le cas où les m variables x_i sont toutes égales à r : la somme x_A pour une classe A de cardinal k est égale à kr , et la partie soulignée est égale au produit qui a été noté X_P dans l'identité utilisée.

La somme cherchée n'est autre que la somme de ces X_P étendue à toutes les partitions P en h classes non-vides, et l'identité nous indique la valeur de cette somme; après réintroduction du dénominateur $(m-h+1)!$, on trouve ainsi un nombre total de possibilités égal à

$$\frac{\binom{m-1}{h-1} (mr)_{m-h}}{(m-h+1)!} = \frac{1}{mr+1} \binom{m-1}{h-1} C_{mr+1}^{m-(h-1)}$$

Tel est donc le nombre de suites P_1, P_2, \dots, P_r cherchées si l'on impose à la partition non-croisée initiale P_1 de comporter h classes non-vides. Il suffit de sommer cette dernière expression pour h variant de 1 à m , ce qui se fait sans difficultés, pour obtenir le nombre final de possibilités

$$w(m, r+1) = \frac{[m(r+1)]_{m-1}}{m!};$$

le théorème est ainsi établi.

Corollaire 5.1. *Le nombre de suites de $r - 1$ partitions non-croisées dont chacune est strictement plus fine que celle qui la précède, la première ayant au moins deux classes et la dernière en ayant au plus $m - 1$, est égal à*

$$\frac{(rm)_{m-1}}{m!} - \binom{r}{1} \frac{[(r-1)m]_{m-1}}{m!} + \binom{r}{2} \frac{[(r-2)m]_{m-1}}{m!} - \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1},$$

différence r -ième, pour $x = 0$, du polynôme $(mx)_{m-1}/m!$.

Démonstration. Ce corollaire s'établit immédiatement à l'aide du principe d'inclusion-exclusion.

Corollaire 5.2. *Le nombre de cheminement joignant dans T_m la partition triviale (en 1 classe) à la partition discrète (en m classes) est m^{m-2} .*

Démonstration. Cela résulte du corollaire 5.1 appliqué au cas où $r = m - 1$. Dans le polynôme $(mx)_{m-1}$, qui est de degré $m - 1$ en x , seul le terme de degré $m - 1$ en x , qui est égal à $m^{m-1} x^{m-1}$, a une référence $(m - 1)$ -ième non nulle: cette référence est égale à $m^{m-1} (m - 1)!$, ce qui après division par $m!$ donne bien m^{m-2} .

Le même résultat a été établi par Poupart [4] par un procédé mettant ces chemins en bijection avec l'ensemble des arbres à m sommets donnés.

§ 7. Fonction de Möbius*

Théorème 6. *La fonction de Möbius de T_m entre 0 (partition discrète) et M (partition triviale), est égale à*

$$\mu(0, M) = (-1)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{(m-1)! m!} = \frac{(-m)_{m-1}}{m!} = \theta_m.$$

Démonstration. La démonstration se conduit cette fois par récurrence sur m .

* Cf. Rota [7].

Tout élément P de T_m définit le sous-treillis C_P des partitions plus fines que P .

Si $P = \{A_1, A_2, \dots, A_h\}$, avec $h \leq m - 1$, et si les cardinaux des classes correspondantes sont a_1, a_2, \dots, a_h , T_P est isomorphe au produit des treillis $T_{a_1} \times T_{a_2} \times \dots \times T_{a_h}$; et par conséquent la fonction de Möbius de T_m entre 0 et P est égale au produit $\theta_{a_1} \theta_{a_2} \dots \theta_{a_h}$.

Si P est de type $Y = ((s_1, s_2, \dots, s_r, \dots)) \in \mathbb{I}m, h \mathbb{I}$, ce produit est égal à

$$\mu(0, P) = \theta_1^{s_1} \theta_2^{s_2} \dots \theta_k^{s_k} \dots = \frac{[(-1)_0]^{s_1} [(-2)_1]^{s_2} \dots [(-k)_{k-1}]^{s_k}}{(1!)^{s_1} (2!)^{s_2} \dots (k!)^{s_k} \dots}$$

Or les partitions de ce même type Y sont, d'après le théorème 4, en nombre total

$$\frac{m!}{(m-h+1)!} \frac{1}{s_1! s_2! \dots s_k! \dots}$$

La somme des valeurs correspondantes de $\mu(0, P)$ est donc

$$\frac{\varphi(Y)}{(m-h+1)!} [(-1)_0]^{s_1} [(-2)_1]^{s_2} \dots [(-k)_{k-1}]^{s_k} \dots,$$

expression de même forme que celle rencontrée à propos du théorème 5 et avec la même signification de $\varphi(Y)$, mais remplacement de r par -1 .

Si maintenant le type Y n'est plus spécifié, mais que l'on fasse décrire à Y l'ensemble $\mathbb{I}m, h \mathbb{I}$, le calcul de la somme des $\mu(0, P)$ correspondants se conduit comme précédemment, et fait toujours appel à la même identité, mais avec toutes les variables x_i égales à -1 . On trouve ainsi l'expression

$$\frac{\binom{m-1}{h-1} (-m)_{m-h}}{(m-h+1)!}.$$

Pour trouver $\mu(0, M)$, on sait qu'il faut sommer l'expression ci-dessus pour h variant de 2 à m , puis changer le signe de la somme. Pour s'assurer que l'on trouve ainsi $\theta_m = (-m)_{m-1}/m!$ qui n'est autre que la même expression pour $h = 1$, il suffit de montrer que

$$\sum_{h=1}^m \frac{\binom{m-1}{h-1} (-m)_{m-h}}{(m-h+1)!} = 0.$$

Mais cela résulte du fait que le premier membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(-m+1)m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (u)_k (v)_{m-k},$$

avec $u = m - 1$ et $v = -m + 1$, ce qui donne bien 0 en vertu de la formule binominale de Vandermonde. Le théorème 6 est ainsi démontré.

Références

- [1] A. Cayley, On the partitions of a polygon, *Phil. Mag.* 4, 22 (1890–1891) 237–262.
- [2] G. Krewezas, Une famille d'identités mettant en jeu toutes les partitions d'un ensemble fini de variables en un nombre donné de classes, *C.R. Acad. Sci. Paris* 270 (1970) 1140–1143.
- [3] G. Krewezas, Sur les évenements de segments, *Cahiers B.U.R.O.* 15 (1970) 16–22.
- [4] Y. Poupart, Codage et dénombrement de diverses structures apparentées à celle d'arbre, *Cahiers B.U.R.O.* 16 (1970) 71–80.
- [5] G.N. Raney, Functional composition patterns and power series reversion, *Trans. Am. Math. Soc.* 94 (1960) 441–451.
- [6] J. Riordan, *Combinatorial identities* (Wiley, New York, 1968) 148.
- [7] G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. Verw. Gebiete* 2 (1964) 340–368.
- [8] E. Schröder, Vier kombinatorische Probleme, *Z. Math. Phys.* 15 (1870) 361–376.

LE NOMBRE MAXIMAL DE 3-COLORATIONS D'UN GRAPHE CONNEXE

Ioan TOMESCU

*Faculté de Mathématique et de Mécanique, Université de Bucarest,
Bucarest, La Roumanie*

Reçu le 3 mars 1971 *

Résumé. Une k -coloration d'un graphe est une partition de ses sommets en k classes ainsi que deux sommets qui appartiennent à une même classe ne soient pas adjacents.

Dans ce travail on obtient le nombre maximal de 3-colorations des graphes connexes qui le nombre chromatique égal à deux ou à trois et on caractérise ces graphes maximaux.

La terminologie qui sera utilisée dans cet article est celle du livre [1]. Une *coloration* du graphe G à k couleurs ou une *k -coloration* est une partition de ses sommets en k classes non-vides telle que deux sommets appartenant à une même classe ne soient pas adjacents.

Dans un autre travail ([5]) nous avons démontré que pour un graphe G à n sommets et de nombre chromatique égal à k , le nombre maximal de k -colorations de ses sommets est égal à k^{n-k} . Le seul graphe pour lequel cette borne supérieure est atteinte étant celui composé d'une k -clique et de $n-k$ sommets isolés, c'est-à-dire le graphe unique ayant $\gamma(G) = k$ et un nombre minimal de $\binom{k}{2}$ arêtes.

On pose le problème d'obtenir le nombre maximal de colorations minimales pour d'autres classes de graphes, comme par exemple pour les graphes connexes pour les graphes qui n'ont pas de sommets isolés. Dans ce qui suit on obtient le nombre maximal de 3-coloration d'un graphe connexe.

Nous notons par $\text{Col}_3(G)$ le nombre de 3-colorations d'un graphe

Proposition 1. *Si le graphe G à $n \geq 3$ sommets est connexe et de nombre chromatique $\gamma(G) = 2$, alors $\text{Col}_3(G) \leq 2^{n-2} - 1$, les seuls graphes*

* Version révisée reçue le 12 juillet 1971.